Décomposition de Dunford

Lemme : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $F \in \mathbb{K}[X]$ annulant u, $F = \beta \prod_{i=1}^{s} M_i^{\alpha_i}$ déc. en facteurs irréd.
$\forall i \in \{1, \dots, s\}$, $N_i = \ker(M_i^{\alpha_i})$. · $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ et le projecteur sur N_i // à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$ est dans $\mathbb{K}[u]$.

Par lemme des noyaux, $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$.
Les polynômes $(Q_i = \prod_{j\neq i} M_j^{\alpha_j})$ sont p.e.e. donc par Bézout, il existe $(U_i) \in \mathbb{K}[X]^s$,
$\sum_{i=1}^{s} U_i Q_i = 1$. En notant $p_i = P_i(u)$ où $P_i = U_i Q_i$, $\sum_{i=1}^{s} p_i = id_E$.
De plus, $\forall i \neq j$, $p_i \circ p_j = Q_i Q_j(u) \circ U_i U_j(u) = 0$ car $F \mid Q_i Q_j$.
Donc $\forall j \in \{1, \dots, s\}$, $p_j^2 = \sum_{i=1}^{s} p_i \circ p_j = p_j$ car $\sum_{i=1}^{s} p_i = id_E$

D'autre part, pour $i \in \{1, \dots, s\}$:
* → Si $y = p_i(x) \in \operatorname{Im} p_i$, alors $M_i^{\alpha_i}(y) = M_i^{\alpha_i} Q_i U_i(u)(x) = 0$ car $F \mid M_i^{\alpha_i} Q_i U_i$.
donc $\operatorname{Im} p_i \subset N_i$.
→ Si $x \in N_i$, alors $x = \sum_{j=1}^{s} p_j(x) = p_i(x)$ car $p_j(x) = P_j(u)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ p_i(x) & \text{si } j = i \end{cases}$
donc $N_i \subset \operatorname{Im} p_i$ car $M_i^{\alpha_i} \mid P_j$ si $j \neq i$.
* → Si $x \in \ker p_i$, alors $x = \sum_{j\neq i} p_j(x) \in \bigoplus_{j\neq i} \operatorname{Im} p_j = \bigoplus_{j \neq i} N_j$ donc $\ker p_i \subset \bigoplus_{j\neq i} N_j$
→ Si $x \in \bigoplus_{j\neq i} N_j$, alors $p_i(x) = p_i\left(\sum_{j\neq i} p_j(x_j)\right) = 0$ car $p_i \circ p_j = 0$
donc $\bigoplus_{j\neq i} N_j \subset \ker p_i$
Finalement, $p_i \in \mathbb{K}[u]$ est le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$.

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u scindé sur $\mathbb{K}$.
$\exists! (d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$, d diagonalisable, n nilpotent, $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$.
De plus, $d, n \in \mathbb{K}[u]$.

· Notons $\chi_u = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $N_i = \ker((u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i})$.
Par Cayley-Hamilton, le lemme précédent s'applique. Soit $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$, $n = u - d$.
d est diagonalisable (car dans une base adaptée à $E = \bigoplus N_i$, Mat d diagonale).

Par orthogonalité des p_i, $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $n^q = \sum_{i=1}^{s} (u - \lambda_i id_E)^q p_i$
Pour $q = \max_{1 \leq i \leq s} \alpha_i$, $n^q = 0$ car $(u - \lambda_i id_E)^q p_i = ((X - \lambda_i)^q P_i)(u) = 0$ car $\chi_u \mid (X - \lambda_i)^q P_i$.

· Si (d', n') convient, alors $d' - d = n - n'$ est diagonalisable (car d' commute avec n' donc avec u, donc avec $d \in \mathbb{K}[u]$ et codiag) et nilpotent (car n et n' commutent et $(n - n')^{q+q'} = \sum_{k=0}^{q+q'} \binom{q+q'}{k} n^k (n')^{q+q'-k} = 0$) donc nul.